Kalkulus második feladatsor

Determináns számítása

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát! Döntsük el, hogy a mátrixok invertálhatóak-e!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Minél kevesebb számolással határozzuk meg az alábbi mennyiségeket!

(a) $\det(AB)$
(b) $\det(A^T B)$
(c) $\det(BA)$
(d) $\det(A^{-1}B)$
(e) $\det(A^{-1}BA)$

3. Legyen C az alábbi mátrix:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mi lesz C determinánsa? Ennek az ereménynek felhasználásával határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát!

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Legyen A egy olyan valós számokból álló mátrix, amelyről tudjuk, hogy determinánsa 1, azaz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ahol $ad - bc = 1$. Számítsuk ki a $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ mátrixszal vett szorzatát. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy bármely 2×2-es $C = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ mátrixra, amelyre $\det(C) \neq 0$ teljesül, hogy $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix}$.

5. *

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_1 & a & b_2 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_1 & b_2 & a & \dots & b_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & 1 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$